TEORÍA BÁSICA DE LAS ECUACIONES

ECUACIÓN:

La definiremos como aquella igualdad formulada entre dos expresiones matemáticas, en las que esté presente por lo menos una variable que ahora denominaremos incógnita.

Así por ejemplo serán ecuaciones:

$x^2 = -x$; $xy = 6$; $2^{-x} = 8$; $a^3 + b^3 + c^3 = 3$;

$\sqrt[3]{6 - 7x} = -x$; etc.

En general la representaremos mediante:

$$\underbrace{(x;y;\ldots;w)}_{\text{1er miembro}} = \underbrace{g(x;y;\ldots;w)}_{\text{2do miembro}}$$

¿CUÁL ES EL OBJETIVO DE UNA ECUACIÓN?:

Resolver una serie de problemas de la vida cotidiana y esto se logrará al conocer su respectivo conjunto solución.

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN:

Es aquel valor que tomará la incógnita y que es capaz de establecer una verdad.

Así por ejemplo la ecuación: $x^2 = -x$, se verifica únicamente para $x_1 = 0$ ó cuando $x_2 = -1$. Es decir, esta ecuación posee dos soluciones.

CONJUNTO SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN (C.S.):

Es aquella colección constituido por todas las soluciones de la ecuación, así por ejemplo diremos que el C.S. de la ecuación $x^2 = -x$, será: {-1;0}.

Pero el conjunto solución de esta otra ecuación: xy=6, estará formada por ilimitados pares ordenados, tales como:

C.S. = $\{(x_o; y_o)\}$ = {(2;3), (3;2), (-2;-3), (1;6), ...}

NOTA: En el caso que no exista ningún valor que verifique a tal igualdad. C.S. = { }

CLASIFICACIÓN DE UNA ECUACIÓN SEGÚN EL NÚMERO DE SUS SOLUCIONES:

Las ecuaciones se denominarán **COMPATIBLES** en el caso que admitan por lo menos una solución é incompatibles en el caso de que no las tengan.

Clasifique a las ecuaciones:

I. $x^2 = -x^2$ II. $x^2 = x^2$ III. $2^{-x} = 0$

ECUACIONES EQUIVALENTES:

Dos ecuaciones dependientes de la misma incógnita ó incógnitas, serán equivalentes cuando ofrezcan el mismo conjunto solución.

ESTUDIO DE LA ECUACIÓN PARAMÉTRICA:

Por simplificidad, tomemos al Polinomio P(x) = ax+b, con cuya estructura generaremos una ecuación de la forma:

$$\boxed{ax + b = 0}$$

donde “x” será la incógnita, mientras que, a y b serán los parámetros (constantes).

Una ecuación con tales características será:

I. Compatible determinada

Cuando: $a \neq 0 \rightarrow ax + b = 0$

De donde: C.S. = $\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$

II. Compatible indeterminada

Cuando: a = b = o, entonces esta ecuación adquiere la forma:

$$\boxed{0x + 0 = 0}$$

Esta se verifica para cualquier valor de x

III. Inconsistente e incompatible

Cuando: $a = 0 \wedge b \neq 0$; la ecuación sería: 0x+b=0

Esta ecuación no existe algún valor de “x” que la verifique.

Es decir: C.S. = { }

ECUACIÓN POLINOMIAL:
(De grado "n" y una incógnita)

Forma general:

$$\boxed{P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots. a_n = 0}$$

Dónde: $a_0 \neq 0$; $n \in \mathbb{Z}^+$
"x" es la incógnita

RAÍZ DE UN POLINOMIO:

Diremos que "α" es una raíz del polinomio P(x) si y sólo si $P(\alpha) = 0$.

Así por ejemplo las raíces del polinomio $P(x) = x^2 - 4$; serán: -2 ó +2. Puesto que P (-2) = 0; P (+2) = 0.

Corolario:
Si "α" es raíz del Polinomio P(x) entonces $(x - \alpha)$ será factor del P(x).

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA:

Una ecuación polinomial cualquiera admitirá por lo menos una raíz compleja.

Corolario:
Toda ecuación polinomial de grado "n" tiene necesariamente "n" raíces; contada cada una con su respectiva multiplicidad.

PROBLEMA 1.
¿Cuántas raíces admite cada ecuación?

a) $x^3 - x + 1 = 0$

b) $(x - 1)^3 = x^3 - 1$

TEOREMAS:
(A usar en la resolución de las ecuaciones)

Teorema 1.
Si a los dos miembros de una ecuación le añadimos un polinomio P(x), el conjunto solución de esta última, será idéntico al de la inicial. Esto implicará que las ecuaciones:

$$f(x) = g(x)$$
$$f(x) \pm P(x) = g(x) \pm P(x)$$
Son equivalentes

Corolario:
Las ecuaciones: $f(x) = g(x)$ y $f(x) - g(x) = 0$
Resultan ser equivalentes

Teorema 2.
Si a los dos miembros de una ecuación le multiplicamos y por una expresión distinta del cero, entonces en conjunto solución no varía.

Es decir las ecuaciones: $f_{(x)} = g_{(x)}$; $f_{(x)} . k = g_{(x)} . k$ (donde $k \neq 0$) son equivalentes.

Teorema 3.
Las ecuaciones: a = a y $f_{(x)} = g_{(x)}$
serán equivalentes, siempre que: $a > 0 \wedge a \neq 1$.

ECUACIÓN LINEAL: (1er grado)

Es aquella que se genera cuando un polinomio de Primer grado es igualado al polinomio cero.
La representaremos mediante:

$$\boxed{P_{(x)} = ax + b = 0} \qquad a \neq 0$$

Serán ecuaciones de estas características: $2x - 3 = 0$; $-\sqrt{2}x = 0$ para resolver a este tipo de ecuaciones debemos generar una cadena de ecuaciones equivalentes bajo el amparo de los teoremas de las transformaciones.

Ejemplo 1.
Resuelva la ecuación:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})x + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}^3 - \sqrt{2}^3$$